CHAPITRE 2 Fonctions affines. Expressions algébriques

1. Reconnaître une fonction affine

Rappels
- Une **fonction affine** est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui **à chaque nombre réel x associe le nombre $a \times x + b$** où a et b sont des réels donnés.
- Une **fonction linéaire** est une fonction affine particulière : c'est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui **à chaque nombre réel x associe le nombre $a \times x$** où a est un réel donné.

Pour les exercices 1 à 5, chaque fonction donnée est définie sur $\mathbb{R}$; préciser laquelle est linéaire, et laquelle est affine non linéaire.

1. a. $f : x \mapsto 0{,}5x$ **b.** $g : x \mapsto -5x + 4$
c. $h : x \mapsto x^2 - 1$

2. a. $f : x \mapsto 2$ **b.** $g : x \mapsto (-3x + 2)(x + 1)$
c. $h : x \mapsto -6x$

3. a. $f : x \mapsto \frac{x-4}{2}$ **b.** $g : x \mapsto 0{,}1x$
c. $h : x \mapsto (x-1)^2$

4. a. $f : x \mapsto (x-1)(x+1)$ **b.** $g : x \mapsto \frac{3x}{2}$
c. $h : x \mapsto \frac{x-2}{3} - x$

5. a. $f : x \mapsto \left(\frac{x}{3}\right)^2 - 1$
b. $g : x \mapsto (x-1)^2 - (x+1)^2$
c. $h : x \mapsto (x+2)(x-2) - x^2$

2. Déterminer une fonction linéaire

Rappels
- Déterminer une expression algébrique d'une fonction linéaire $\boldsymbol{f : x \mapsto a \times x}$ dont l'image d d'un nombre réel c est connue (c'est-à-dire $\boldsymbol{f(c) = d}$), revient à résoudre **l'équation $\boldsymbol{a \times c = d}$ d'inconnue $\boldsymbol{a}$.**
- **L'image de** 0 par toute fonction **linéaire f est 0** car $f(0) = a \times 0 = 0$.
- **L'image de 1** par la fonction **linéaire $f : x \mapsto ax$ est a** car $f(1) = a \times 1 = a$.

6. Déterminer une expression algébrique de la fonction linéaire f dans chaque cas :
a. $f(1) = -5$
b. L'image de -2 par f est 5.
c. $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ **d**. $f(2) = 0$

7. Dans chaque cas, existe-t-il une fonction linéaire f qui vérifie les égalités. Justifier.
a. $f(-3) = 0{,}5$ et $f(1) = -\frac{1}{6}$.
b. $f(2) = 5$ et $f(3) = 4$.
c. $f(0) = 0$

3. Utiliser le tableur

8. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = -5x - 3$$
Avec le tableur, on souhaite réaliser un tableau de valeurs de f comme ci-dessous.

	A	B	C	D
1	*x*	-2	-0,5	4,1
2	*f(x)*			

Quelle formule saisir dans la cellule B2 avant de la recopier vers la droite ?

9. On donne l'écran de tableur ci-dessous.

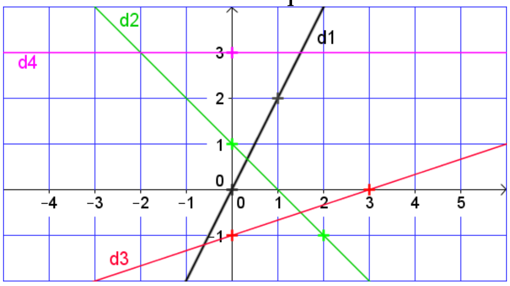
	A	B	C	D
1	a	-3	b	2
2	*x*	-2,5	1,9	4
3	*f(x)*			

Parmi les trois formules suivantes, laquelle doit être saisie dans la cellule B3 et recopier vers la droite afin de compéter le tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto -3x + 2$.
a. =B1*B2+D1 **b.** =$B$1*B2+D1
c. =$B$1*B2+$D$1

4. Lire graphiquement

Rappels
Dans un repère du plan, la courbe représentative d'une **fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite d non parallèle à l'axe des ordonnées.**
a est appelé **le coefficient directeur** de la droite d et b **l'ordonnée à l'origine** de d.

10. Dans le repère ci-dessous, chaque droite d_1, d_2, d_3 et d_4 représente une fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$.
Par lecture graphique, déterminer les coefficients a et b de chaque fonction.



11. Dans un repère du plan, on considère les points : A(–1 ; –2), B(2 ; 4), C(0,5 ; 2), D(2,5 ; –2) et E(2,5 ; 1).

a. Placer ces cinq points dans un repère.

b. Par lecture graphique déterminer une expression algébrique des fonctions affines représentées respectivement par (AB) ; (AD) et (CD).

c. La droite (DE) représente-t-elle une fonction affine ?

5. Utiliser quelques règles de calculs

Rappels
- Pour tous réels a, b et x, $\boldsymbol{ax + bx = (a+b)x}$, • $\boldsymbol{x \times x = x^2}$ • $\boldsymbol{a \times x \times b \times x = a \times b \times x^2}$
- Pour tous réels a et x non nuls, pour tout entier naturel n, • $\boldsymbol{(ax)^n = a^n x^n}$ • $\boldsymbol{x^0 = 1}$
- Pour tous réels a, b et c avec b et c non nuls, $\boldsymbol{\frac{a \times c}{b \times c} = \frac{a}{b}}$.

12. Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse et justifier.
Pour tout nombre réel x,

a. $-2x + 6x$ est égal à $4x$; **b.** $3x + x$ est égal à $3x^2$; **c.** $(4x)^2$ est égal à $4x^2$;

d. $(-2x)^2$ est égal à $-4x^2$; **e.** $-2x \times 3x = -6x$; **f.** si $x \neq 2$, alors $\frac{6+x}{5+x} = \frac{6}{5}$;

g. si $x \neq -5$, alors $\frac{8(x-4)}{8(x+5)} = \frac{x-4}{x+5}$; **h.** si $x \neq -1$, alors $\frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = x - 1$.

6. Transformer des expressions algébriques

Rappels
a, b, c, d et k désignent des nombres réels.
- $\boldsymbol{k(a+b) = ka + kb}$ • $\boldsymbol{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$
- $\boldsymbol{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ • $\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ • $\boldsymbol{(a-b)(a+b) = a^2 - b^2}$

13. Dans chaque cas, indiquer la réponse par A, B, C ou D.

Pour tout nombre réel x,	A	B	C	D
$(x-3)^2$ est égal à …	$x^2 - 2 \times x \times (-3) + 9$	$x^2 - 9$	$x^2 - 2 \times x \times 3 + 9$	je ne sais pas
$x^2 + 8x$ est égal à	$9x$	$x(x+8)$	$9x^2$	je ne sais pas
$(x-2)(x+5)$ est égal à	$x^2 + 3x - 10$	$x^2 - 10$	$x^2 - 3x - 10$	je ne sais pas
$(-1+x)^2$ est égal à	$1 + 2x + x^2$	$-1 - 2x + x^2$	$(x-1)^2$	je ne sais pas
Une forme factorisée de $x^2 - 8x + 16$ est	$(x-8)^2$	$(x-2)(x-8)$	$(x-4)^2$	je ne sais pas

Réponses aux exercices complémentaires

1. Fonction linéaire : **a.** $f : x \mapsto 0{,}5x$.
Fonction affine non linéaire :
b. $g : x \mapsto -5x + 4$.

2. Fonction linéaire : **c.** $h : x \mapsto -6x$.

Fonction affine non linéaire : **a.** $f : x \mapsto 2$.

3. Fonction linéaire : **b.** $g : x \mapsto 0{,}1x$.
Fonction affine non linéaire : **a.** $f : x \mapsto \frac{x-4}{2}$
car $f(x) = \frac{1}{2}x - 2$.

4. Fonction linéaire : **b.** $g : x \mapsto \frac{3x}{2}$.
Fonction affine non linéaire :
c. $h : x \mapsto \frac{x-2}{3} - x$ car $h(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

5. Fonction linéaire :
b. $g : x \mapsto (x-1)^2 - (x+1)^2$ car $g(x) = -4x$.
Fonction affine non linéaire :
c. $h : x \mapsto (x+2)(x-2) - x^2$ car $h(x) = -4$.

6. On cherche la valeur du nombre réel a telle que pour tout nombre réel x, $f(x)$ s'écrit sous la forme $a \times x$.
a. $a \times 1 = -5$ donc $a = -5$;
$f(x) = -5x$.
b. $a \times (-2) = 5$ donc $a = -\frac{5}{2}$;
$f(x) = -\frac{5}{2}x$.
c. $a \times \frac{1}{3} = 2$ donc $a = 2 \times 3 = 6$;
$f(x) = 6x$.
d. $a \times 2 = 0$ donc $a = 0$;
$f(x) = 0$.

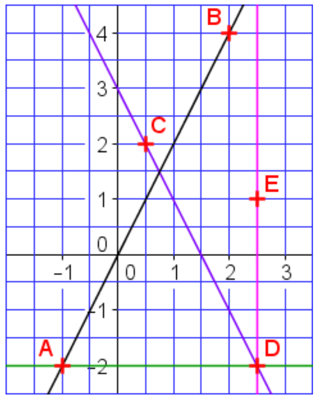
7. Dans chaque cas, on recherche $f(x)$ sous la forme $a \times x$.
a. $a \times (-3) = 0.5$ et $a \times 1 = -\frac{1}{6}$ d'où, dans les deux cas : $a = -\frac{1}{6}$. $f : x \mapsto -\frac{1}{6}x$ convient.
b. $a \times 2 = 5$ et $a \times 3 = 4$ d'où :
$a = \frac{5}{2}$ et $a = \frac{4}{3}$, ce qui est impossible.
c. Toutes les fonctions linéaires f vérifient $f(0) = 0$. Quelle que soit la valeur du nombre réel a, $f : x \mapsto ax$ convient.

8. Formule à saisir : $= -5 * \mathrm{B1} - 3$.

9. Formule correcte : **c.** =$B$1*B2+$D$1.

10. $d1$: $a = 2$ et $b = 0$ $d2$: $a = -1$ et $b = 1$
$d3$: $a = \frac{1}{3}$ et $b = -1$ $d4$: $a = 0$ et $b = 3$

11. a.



b. (AB) : $f(x) = 2x$
(AD) : $f(x) = -2$
(CD) : $f(x) = -2x + 3$
c. La droite (DE) ne peut pas représenter une fonction car elle est parallèle à l'axe des ordonnées ($2{,}5$ admet une infinité d'images).

12. **a.** L'affirmation est vraie. En effet, pour tout nombre réel x,
$$-2x + 6x = (-2+6)x = 4x$$
b. L'affirmation est fausse. En effet, pour $x = 1$, $3x + x = 4$ et $3x^2 = 3$.
c. L'affirmation est fausse. En effet, pour $x = 1$, $(4x)^2 = 16$ et $4x^2 = 4$.
d. L'affirmation est fausse. En effet, pour $x = 3$, $(-2x)^2 = 36$ et $-4x^2 = -36$.
e. L'affirmation est fausse. En effet, pour $x = 2, -2x \times 3x = -24$ et $-6x = -12$.
f. L'affirmation est fausse.
En effet, pour $x = 1$, $\frac{6+1}{5+1} = \frac{7}{6} \neq \frac{6}{5}$.
g. L'affirmation est vraie.
En effet, pour tout nombre réel $x \neq -5$,
$$\frac{\mathbf{8} \times (x-4)}{\mathbf{8} \times (x+5)} = \frac{x-4}{x-5}$$
h. L'affirmation est vraie. En effet, pour tout nombre réel $x \neq -1$,
$$\frac{(\boldsymbol{x+1}) \times (x-1)}{(\boldsymbol{x+1}) \times 1} = \frac{x-1}{1} = x - 1$$

13. Réponse C : $(x-3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 9$.
Réponse B : $x^2 + 8x = x(x+8)$.
Réponse A : $(x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10$.
Réponse C : $(-1+x)^2 = (x-1)^2$.
Réponse C : $x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2$.