

# Chapitre 13 Parcours 1

Comment simuler une variable aléatoire et déterminer la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  avec Python ?

**Exemple :** Une roue de loterie est formée de 10 cases : 3 cases rouges et 7 cases noires. Lorsqu'on obtient une case rouge, on gagne 10 €, sinon on perd 5 €.  $X$  est la variable aléatoire qui donne le gain du joueur.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- b) Écrire en langage Python :
  - une fonction `Gain` qui simule la variable aléatoire  $X$  ;
  - une fonction `Moyenne` qui calcule et renvoie pour résultat la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de  $X$ .
- c) Saisir et tester ces deux fonctions.

a)  $P(X = 10) = \frac{3}{10}$  et  $P(X = -5) = \frac{7}{10}$ .

b) Voici les fonctions `Gain` et `Moyenne` écrites en langage Python.

c) On obtient par exemple :

```
>>> Gain()
10
```

```
>>> Moyenne(100)
0.4
```

```
1 from random import *
2
3 def Gain():
4     a=randint(1,10)
5     if a<=3:
6         x=10
7     else:
8         x=-5
9     return x
10
11 def Moyenne(n):
12     s=0
13     for i in range(n):
14         s=s+Gain()
15     m=s/n
16     return m
```

**1** Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire au hasard une boule et on note son numéro. La variable aléatoire  $X$  donne pour valeur 1 si ce numéro est multiple de 6, et 0 dans les autres cas.

- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- b) Voici ci-contre la fonction `x` écrite en langage Python, qui simule cette variable aléatoire. Que représente la variable `a` ? .....

```
1 from random import *
2
3 def X():
4     a=randint(1,20)
5     if a<=3:
6         x=1
7     else:
8         x=0
9     return x
```

c) Expliquer le rôle des lignes 5 à 8 du programme.

**2** La fonction `Moyenne` écrite en langage Python calcule et renvoie la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$  définie à l'exercice **1**.

```

10
11 def Moyenne(n):
12     s=0
13     for i in range(n):
14         s=
15     m=s/n
16     return 
    
```

a) Compléter les lignes 14 et 16 du programme.

b) Saisir et tester les fonctions  $X$  et `Moyenne`.

**3** On dispose d'un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance ce dé 2 fois de suite.  $Y$  est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où la face 6 est obtenue. Voici ci-contre une fonction `Y` écrite en langage Python qui réalise une simulation de cette variable aléatoire.

```

1 from random import *
2
3 def Y():
4     y=0
5     a=randint(1,6)
6     b=randint(1,6)
7     if a==6:
8         y=1
9     if b==6:
10        y=y+1
11     return y
    
```

a) Que représentent les variables  $a$  et  $b$  dans cette situation ? .....

.....

b) Expliquer le rôle des lignes 7 à 10 du programme.

c) Saisir et tester cette fonction.

**4** Une urne contient 17 boules rouges, 32 boules vertes et 51 boules bleues. On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule est rouge, on gagne 5 € ;
- si la boule est verte, on gagne 7 € ;
- si la boule est bleue, on perd 2 €.

```

1 from random import *
2
3 def X():
4     a=randint(1,100)
5     if a<=17:
6         x=
7     if 18<=a and a<=49:
8         x=
9     if :
10        x=-2
11     return x
    
```

Nom : \_\_\_\_\_

Classe : \_\_\_\_\_

$X$  est la variable aléatoire qui donne le gain algorithmique de la partie. La fonction  $x$  écrite en langage Python réalise une simulation de la variable aléatoire  $X$ .

- a) Compléter les lignes 6, 8 et 9.
- b) Saisir et tester la fonction obtenue.

**5** Pour un archer, la probabilité d'atteindre la cible est 0,4. Il effectue plusieurs tirs successifs jusqu'à ce qu'il atteigne la cible.  $X$  est la variable aléatoire qui donne le nombre de tirs effectués.

```
1 from random import *
2
3 def Nb():
```

- a) Écrire en langage Python une fonction  $Nb$  qui réalise une simulation de  $X$ .
- b) Saisir et tester cette fonction.

**6** a) Écrire en langage Python une fonction  $Moyenne$  qui calcule et renvoie la moyenne d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$  définie à l'exercice **5**.

b) Proposer une estimation de l'espérance de la variable aléatoire  $X$ . .....

## Chapitre 13

### Parcours 2

Comment simuler avec Python  $N$  échantillons de taille  $n$  d'une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$  ?

**Exemple :**  $X$  est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-contre.

$x$	0	1	2
$P(X = x)$	0,1	0,4	0,5

**a)** Déterminer l'espérance  $\mu$  et l'écart-type  $\sigma$  de cette variable aléatoire.

**b)** On réalise une simulation d'un échantillon de taille  $n$  de la variable aléatoire

$X$ . Quel résultat la fonction `Distance` programmée ci-contre renvoie-t-elle ?

**c)** La fonction `Répétition` permet de simuler  $N$  échantillons de taille  $n$  de  $X$ . Quel résultat renvoie-t-elle ?

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def Distance(n):
5     somme=0
6     for k in range(n):
7         a=randint(1,10)
8         if a==1:
9             x=0
10            if 2<=a and a<=5:
11                x=1
12            if a>=6:
13                x=2
14            somme=somme+x
15     m=somme/n
16     d=abs(m-1.4)
17     return d
18
19 def Répétition(N,n):
20     s=sqrt(0.44)
21     r=0
22     for j in range(N):
23         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
24             r=r+1
25     p=r/N
26     return p

```

**a)**  $E(X) = 0,1 \times 0 + 0,4 \times 1 + 0,5 \times 2 = 1,4$ .

$$V(X) = 0,1 \times (0 - 1,4)^2 + 0,4 \times (1 - 1,4)^2 + 0,5 \times (2 - 1,4)^2.$$

$$V(X) = 0,44.$$

$$\text{Donc } \mu = 1,4 \text{ et } \sigma = \sqrt{0,44}.$$

**b)** La fonction `Distance` renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne  $m$  de l'échantillon de taille  $n$  et l'espérance  $\mu$  de la variable aléatoire  $X$ .

**c)** La fonction `Répétition` renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre  $m$  et  $\mu$  soit inférieur ou égal à  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Pour les exercices **1** et **2**, les 6 faces d'un dé équilibré sont numérotées 1, 1, 1, 2, 2, 3.

On lance ce dé, la variable aléatoire  $X$  donne le numéro obtenu. On admet que  $E(x) = \frac{5}{3}$  et

$V(x) = \frac{5}{9}$ . On réalise une simulation de  $N$  échantillons de taille  $n$  de la variable aléatoire  $X$ .

**1** On s'intéresse à la fonction `Distance`.

a) Que représente chacune des variables `a`, `x`, `somme`, `m` et `d` dans cette situation ?

.....

.....

.....

.....

b) Saisir et tester cette fonction.

**2** On s'intéresse à la fonction `Répétition`.

a) Que représente chacune des variables `s`, `r` et `p` dans cette situation ?

.....

.....

b) Saisir et tester cette fonction.

Pour les exercices **3** et **4**, un coffret contient 60 perles vertes et 40 perles bleues. On tire successivement et avec remise 2 perles du coffret. `X` est la variable aléatoire qui donne le nombre de perles vertes obtenues. On admet que  $E(X) = 1,2$  et  $V(X) = 0,48$ .

**3** La fonction `Distance` renvoie pour résultat l'écart entre la moyenne d'un échantillon de taille `n` de `X` et l'espérance de `X`. Compléter la ligne 22 du programme.

**4** La fonction `Répétition` réalise une simulation de `N` échantillons de taille `n` de `X`.

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def Distance(n):
5     somme=0
6     for k in range(n):
7         a=randint(1,6)
8         if a<=3:
9             x=1
10            if a==4 or a==5:
11                x=2
12            if a==6:
13                x=3
14            somme=somme+x
15        m=somme/n
16        d=abs(m-5/3)
17        return d
18
19 def Répétition(N,n):
20     s=sqrt(5/9)
21     r=0
22     for j in range(N):
23         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
24             r=r+1
25     p=r/N
26     return p
    
```

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def X():
5     x=0
6     a=randint(1,100)
7     b=randint(1,100)
8     if a<=60:
9         x=1
10    if b<=60:
11        x=x+1
12    return x
13
14 def Moyenne(n):
15     somme=0
16     for k in range(n):
17         somme=somme+X()
18     m=somme/n
19     return m
20
21 def Distance(n):
22     d=abs(Moyenne(n)-1.2)
23     return d
24
25 def Répétition(N,n):
26     s=sqrt(0.48)
27     r=0
28     for j in range(N):
29         if Distance(n)<=2*s/sqrt(n):
30             r=r+1
31     p=r/N
32     return p
    
```

Elle renvoie la proportion d'échantillons tels que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et  $E(X)$  soit inférieur ou égal à  $\frac{20}{\sqrt{n}}$ .

- a) Compléter la ligne 29 du programme.
- b) Saisir et tester les fonctions de ce programme.

Pour les exercices **5** et **6**, une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5. On tire au hasard et avec remise 5 boules de l'urne. La variable aléatoire  $X$  donne le nombre de fois où la boule numérotée 1 a été tirée. On admet que  $E(X) = 1$  et  $V(X) = 0,8$ .

**5** Écrire la fonction `Répétition` qui simule  $N$  échantillons de taille  $n$  de  $X$  et renvoie la proportion de ces échantillons tels que l'écart entre la moyenne de l'échantillon et  $E(X)$  soit inférieur ou égal à  $\frac{20\sigma(X)}{\sqrt{n}}$ .

**6** a) Saisir le programme obtenu.  
 b) Exécuter plusieurs fois `Répétition` (100, 10 000). Que dire de la proportion d'échantillons obtenus ? Interpréter ce résultat.

```

1 from math import *
2 from random import *
3
4 def X():
5     x=0
6     for i in range(5):
7         a=randint(1,5)
8         if a==1:
9             x=x+1
10    return x
11
12 def Moyenne(n):
13     somme=0
14     for k in range(n):
15         somme=somme+X()
16     m=somme/n
17     return m
18
19 def Répétition(N,n):
20     s=sqrt(0.8)
21     r=0
22     for j in range(N):
23         if abs(Moyenne(n)-1)<=2*s/sqrt(n):
24             r=r+1
25     p=r/N
26     return p
    
```

.....

.....

.....

.....