Chapitre 12

Mouvements et énergies dans un champ uniforme

Paragraphe 1 – Mouvements et énergies dans un champ de pesanteur uniforme

Champ de pesanteur uniforme

En un point situé au voisinage de sa surface, la Terre crée un champ de pesanteur $\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m}$ où $\vec{P}$ est le poids d'un objet de masse m placé en ce point. Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est défini par :

sa **direction**, appelée verticale du lieu ;

son **sens**, vers la Terre ;

sa **norme**, qui dépend du lieu (($g = 9{,}81\ N.kg^{-1}$ à Paris).

Le champ de pesanteur est dit **uniforme** dans une région de l'espace si l'on peut considérer que la direction, le sens et la norme de $\vec{g}$ sont identiques en tout point de cette région : $\vec{g} = \overrightarrow{cste}$.

Étude du mouvement

Dans le **référentiel** terrestre supposé galiléen, le mouvement du centre de masse G d'un **système** de masse constante m est étudié dans un repère d'espace $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec un axe vertical orienté vers le haut.

Les **conditions initiales** sont les suivantes.

À la date $t_0 = 0$, le centre de masse du système est situé au point O ; son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ est dans le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$ et il est incliné d'un angle α avec l'horizontale.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OG}$ à la date $t_0 = 0$ sont :

$$\overrightarrow{OG}(0)\begin{cases} x(0) = 0 \\ y\ (0) = 0 \\ z\ (0) = 0 \end{cases}$$

$$\vec{v}(0)\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y(0) = v_{0y} = 0 \\ v_z\ (0) = v_{0z} = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

D'après l'inventaire des forces extérieures, la seule force exercée sur le système en chute libre est le poids $\vec{P} = m\vec{g}$.

Remarque concernant le vocabulaire utilisé

En physique, le mouvement dans un champ de pesanteur uniforme d'un système soumis uniquement à son poids est appelé « **chute libre** ».

Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au système est égale à la masse m multipliée par le vecteur accélération du centre de masse du système.

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}(t)$$

Ainsi $m\vec{g} = m\vec{a}(t)$ donc $\vec{a}(t) = \vec{g} = \overrightarrow{cste}$.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, le vecteur accélération $\vec{a}(t)$ du centre de masse d'un système de masse constante en mouvement de chute libre dans le champ de pesanteur uniforme est égal au champ de pesanteur vecteur $\vec{g}$.

Les coordonnées du vecteur accélération sont :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z\,(t) = -g \end{cases}$$

Le mouvement du centre de masse du système est uniformément accéléré et ne dépend pas de la masse du système.

Remarque concernant l'analyse dimensionnelle

La relation $\vec{a} = \vec{g}$ montre que g possède la dimension d'une accélération et peut donc s'exprimer en mètre par seconde au carré ($m.s^{-2}$).

Les coordonnées du **vecteur vitesse** $\vec{v}$ sont des primitives des coordonnées du vecteur accélération défini par $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Points maths

• Une primitive F majuscule d'une fonction f est une fonction telle que la dérivée de F majuscule est égale à f, soit $F' = f$.

• Les primitives d'une fonction constante $f(t) = \alpha$ sont les fonctions affines :

$F(t) = \alpha t + \beta$ avec alpha (α) et béta (β) deux constantes.

• Les primitives d'une fonction affine $f(t) = \alpha t + \beta$ sont les fonctions polynômes du second degré :

$F(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \beta t + \delta$ avec alpha (α), béta (β) et delta (δ) trois constantes.

Comme les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ sont :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

les coordonnées du vecteur vitesse v sont :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = cste_1 \\ v_y(t) = cste_2 \\ v_z(t) = -gt + cste_3 \end{cases}$$

D'après les conditions initiales :

$v_x(0) = v_0 \cos\alpha$ donc constante 1 : $cste_1 = v_0 \cos\alpha$

$v_y(0) = 0$ donc constante 2 : $cste_2 = 0$

$v_z(0) = v_0 \sin\alpha$, donc constante 3 : $cste_3 = v_0 \sin\alpha$

Ainsi les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ sont :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z\,(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Les équations horaires du mouvement sont les expressions des coordonnées du vecteur position en fonction du temps. Ces coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ sont des primitives des coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ défini par :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$$

Comme les coordonnées du vecteur vitesse v sont :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = \dfrac{dy}{dt} = 0 \\ v_z\,(t) = \dfrac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

alors

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t + cste_4 \\ y(t) = cste_5 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t + cste_6 \end{cases}$$

D’après les conditions initiales à la date t = 0 : $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ donc les constantes 4,5 et 6 : $cste_4 = cste_5 = cste_6 = 0$.

Ainsi les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ sont :

$$\overrightarrow{OG}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

Les équations horaires du mouvement constituent une représentation paramétrique de la **trajectoire** du centre de masse G. On constate que y = 0 quelle que soit la date t.

La trajectoire du centre de masse du système est plane. Elle est comprise dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$, c’est-à-dire dans le plan vertical contenant son vecteur vitesse initial, l’origine de la trajectoire O et le champ de pesanteur $\vec{g}$.

• Si le système est lâché sans vitesse initiale $(v_0 = 0)$ ou lancé verticalement avec alpha (α) égal à plus ou moins 90 degrés et donc $\cos(\alpha) = 0$, alors $x(t) = 0$. La trajectoire est une droite, confondue avec l’axe vertical $(O, \vec{k})$.

• Si le système est lancé avec une vitesse initiale non verticale, la trajectoire est une portion de parabole, tournée vers le bas. On obtient son équation en exprimant t en fonction de x, puis en remplaçant t par cette expression dans l’expression de z.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \text{ donc } z(x) = -\frac{1}{2}\frac{gx^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} + (\tan\alpha)x$$

Aspects énergétiques

L'**énergie mécanique** E_m du système est la somme de son **énergie cinétique** E_c et de son **énergie potentielle de pesanteur** E_{pp}.

La seule force exercée sur le système (son poids représenté par le vecteur $\vec{P}$) étant conservative, son énergie mécanique se conserve au cours de son mouvement dans un référentiel supposé galiléen.

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}(\text{non conservatives})) = 0$$

Remarque concernant le vocabulaire

Une force dont le travail ne dépend que des positions des points de départ et d'arrivée est dite conservative.

Paragraphe 2 – Mouvements et énergies dans un champ électrique uniforme

Champ électrique créé par un condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques chargées, parallèles entre elles et séparées par un isolant (vide, air et cetera). Ce dispositif permet de créer un champ électrique uniforme dans la zone de l'espace située entre les deux plaques.

Les lignes de champ sont perpendiculaires aux plaques, orientées de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement.

Le champ électrique $\vec{E}$ créé par le condensateur plan dépend de la distance d qui sépare les deux plaques (en mètre) et de la tension électrique U appliquée entre les plaques (en volt V) :

Vecteur $\vec{E}$:

$$\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{k}$$

L'axe $(O, \vec{k})$ étant orienté de la plaque chargée négativement vers la plaque chargée positivement.

Étude du mouvement

Dans le **référentiel** terrestre considéré galiléen, le mouvement d'une particule, modélisée par un point matériel M de masse m constante et de charge électrique q, est étudié dans un **repère d'espace** $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec l'axe $(O; \vec{k})$ dans la direction du champ électrique vecteur $\vec{E}$ et en sens inverse de celui-ci : $\vec{E} = -E \times \vec{k}$.

Les conditions initiales sont les suivantes

À la date $t_0 = 0$ la particule est située au point O et son vecteur vitesse $\overrightarrow{v_0}$ indice zéro est dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et incliné d'un angle alpha (α) avec l'horizontale.

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ à la date $t(0)=0$ sont :

$$\overrightarrow{OM}(0)\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées du vecteur vitesse v à la date t(0) = 0 sont :

$$\vec{v}(0)\begin{cases} v_x(0) = v_{0x} = v_0\cos\alpha \\ v_y(0) = v_{0y} = 0 \\ v_z\,(0) = v_{0z} = v_0\sin\alpha \end{cases}$$

D'après **l'inventaire des forces extérieures**, la particule de charge q , placée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}$, est soumise à la force électrique :

$$\overrightarrow{F_{el}} = q\vec{E}$$

On considère que le poids $\vec{P}$ de la particule est négligeable devant la force électrique $\overrightarrow{F_{el}}$.

Concernant les **ordres de grandeur,** pour un proton placé dans le champ de pesanteur terrestre et dans un champ électrique de norme $E = 10^4\ V.m^{-1}$. • $P = mg = 10^{-27} \times 10 = 10^{-26}$ N • $F_{el} = eE = 10^{-19} \times 10^4 = 10^{-15}$ N Le poids du proton est négligeable devant la force électrique F_{el}.

Vecteur accélération

Ainsi, d'après la deuxième loi de Newton, la somme vectorielle des forces extérieures appliquées au système est égale à la masse m multipliée par le vecteur accélération du centre de masse du système :

$$\sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{a}(t)$$

$$\text{donc } q\vec{E} = m\vec{a}(t)$$

$$\text{et } \vec{a}(t) = -\frac{qE}{m}\vec{k}$$

Les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}(t)$ sont :

$$\vec{a}(t)\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -\dfrac{qE}{m} \end{cases}$$

Remarque

La norme $E = \frac{U}{d}$ du champ électrique $\vec{E}$ est telle que :

• E augmente si la tension électrique U augmente ;

• E diminue si la distance d entre les plaques augmente.

Éviter les erreurs

De plus, la force électrique vecteur F indice « el » ($\overrightarrow{F_{el}}$) et le champ électrique $\vec{E}$ ont la même direction. En revanche :

– si la charge q de la particule sur laquelle s'applique la force électrique est supérieure à 0, la force électrique vecteur F indice « el » ($\overrightarrow{F_{el}}$) et le champ électrique $\vec{E}$ ont le même sens ;

– si la charge q de la particule sur laquelle s'applique la force électrique est inférieure à 0, la force électrique vecteur F indice « el » ($\overrightarrow{F_{el}}$) et le champ électrique vecteur $\vec{E}$ ont des sens contraires.

Vecteur vitesse et équations horaires du mouvement

En utilisant la même méthode que dans le paragraphe 1, on trouve que :

$$\vec{v}(t)\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z\,(t) = -\dfrac{qE}{m}t + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM}(t)\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}t^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{cases}$$

Trajectoire

Comme dans le cas du mouvement dans un champ de pesanteur uniforme, on constate que $y(t) = 0$ quelle que soit la date t.

La trajectoire de la particule est plane. Elle est comprise dans le plan $(O; \vec{i}, \vec{k})$, c'est-à-dire le plan contenant son vecteur vitesse initial, l'origine de la trajectoire O et le champ électrique $\vec{E}$.

Déviation électrique

Le champ électrique $\vec{E}$ peut être utilisé pour dévier une particule chargée. Si le vecteur vitesse initial n'est pas dans la direction du champ $\vec{E}$, c'est-à-dire si alpha différent de plus ou moins 90 degrés ($\alpha \neq \pm 90°$), la trajectoire de la particule est une portion de parabole d'équation :

$$z(x) = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m}\frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha)^2} + (\tan\alpha)x$$

L'orientation de la trajectoire dépend de la charge de la particule.

Accélération linéaire

Le champ électrique $\vec{E}$ peut être utilisé pour accélérer une particule chargée.

Si celle-ci est initialement immobile (v indice 0 égal 0 : $v_0 = 0$) ou possède un vecteur vitesse initial orienté dans la direction du champ $\vec{E}$, c'est-à-dire tel que cosinus alpha est égal à 0 car alpha égal plus ou moins 90 degrés ($\alpha = \pm 90°$), , la trajectoire de la particule est une droite dont la direction est celle du champ électrique vecteur $\vec{E}$.

En choisissant alpha égal à 90 degrés ($\alpha = 90°$),

et $q = -e < 0 : v(t) = v_z(t) = \frac{eE}{m} t + v_0$

Dans ce cas, la valeur de la vitesse augmente au cours du temps. C'est le principe d'un accélérateur linéaire de particules.

Aspects énergétiques

Dans un champ électrique uniforme, l'application du théorème de l'énergie cinétique entre deux positions A et B, dans un référentiel supposé galiléen, permet de calculer la **variation d'énergie cinétique** de la particule :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{AB}(\vec{F}) = W_{AB}(\overrightarrow{F_{el}}) = \overrightarrow{F_{el}}.\overrightarrow{AB}$$

• Si vecteur F indice « el » scalaire vecteur AB est supérieur à 0 ($\overrightarrow{F_{el}}.\overrightarrow{AB} > 0$) : la valeur de la vitesse de la particule augmente.

• Si vecteur F indice « el » scalaire vecteur AB est inférieur à 0 ($\overrightarrow{F_{el}}.\overrightarrow{AB} < 0$) : la valeur de la vitesse de la particule diminue.