

PARCOURS ROUGE

On a $m^2 - n^2 = 464$ c'est-à-dire $(m-n)(m+n) = 2^4 \times 29$ avec $m-n < m+n$.

$m^2 - n^2$ est pair donc $m-n$ et $m+n$ sont pairs ou de parités contraires.

• $m-n$ et $m+n$ sont pairs :

$$\begin{cases} m-n=2 \\ m+n=232 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} m-n=4 \\ m+n=116 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} m-n=8 \\ m+n=58 \end{cases}$$

le 1^{er} système donne $m=117$ et $n=115$ ce qui ne convient pas.

le 2^e système donne $m=60$ et $n=56$.

le 3^e système donne $m=33$ et $n=25$.

Les deux sportifs appartiennent donc soit au groupe des jeunes adultes, soit au groupe des adultes.

• $m-n$ et $m+n$ sont de parités contraires avec $m-n < m+n$. On a donc $\begin{cases} m-n=24 \\ m+n=29 \end{cases}$.

Le système n'a pas de solution car par addition des 2 lignes on obtient $2m=53$, ce qui est absurde.

126 PARCOURS VERT

a. $\frac{23}{26} \times 3 + \frac{5}{13} = \frac{69}{26} + \frac{2 \times 5}{2 \times 13} = \frac{69}{26} + \frac{10}{26} = \frac{79}{26}$ et $\frac{79}{26} \neq 3$ donc le point de coordonnées $(3; 3)$ n'appartient pas à la droite d .

$$\begin{aligned} \text{b. } \frac{23}{26} \times (-14) + \frac{5}{13} &= -\frac{322}{26} + \frac{2 \times 5}{2 \times 13} = -\frac{322}{26} + \frac{10}{26} \\ &= -\frac{312}{26} = -12 \end{aligned}$$

L'ordonnée de N est donc -12.

$$\frac{23}{26}x + \frac{5}{13} = 11 \text{ donc } 23x + 10 = 286, \text{ donc } x = \frac{276}{23} = 12.$$

L'abscisse de M est donc 12.

c. D'après b., les points de coordonnées $(-14; -12)$ et $(12; 11)$ appartiennent à d , donc il existe des points de d à coordonnées entières.

PARCOURS BLEU

a. On a $y = \frac{23}{26}x + \frac{5}{13}$, donc $26y = 23x + 10$ donc

$$23x = 26y - 10 \text{ soit } 23x = 2(13y - 5).$$

b. S'il existe un point de coordonnées (x, y) de d à coordonnées entières alors $23x$ et $2(13y - 5)$ sont des entiers.

Or $2(13y - 5)$ est pair et 23 est impair, donc x est un nombre entier pair.

$$\text{c. Pour } x=12, y = \frac{23}{26} \times 12 + \frac{5}{13} = \frac{23 \times 6}{13} + \frac{5}{13} = \frac{143}{13} = 11.$$

Le point de coordonnées $(12; 11)$ est un point de d .

PARCOURS ROUGE

$$\text{On remarque que pour } x=12, \frac{23}{26} \times 12 + \frac{5}{13} = \frac{23 \times 6}{13} + \frac{5}{13} = \frac{143}{13} = 11.$$

Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$, le point d'abscisse $x = 12 - 26k$ a son ordonnée entière.

$$\text{En effet, } \frac{23}{26}(12 - 26k) + \frac{5}{13} = \frac{23}{26} \times 12 + \frac{5}{13} - \frac{23}{26} \times 26k \text{ soit } 11 - 23k.$$

Ainsi, l'ensemble des points de coordonnées $(12 - 26k; 11 - 23k)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ ont une abscisse inférieure à 12 et appartiennent à d .

Préparer l'évaluation

127 a. $132 = 11 \times 12$. 132 est divisible par 11.

b. $457 = 11 \times 41 + 6$. 457 n'est pas divisible par 11.

128 a. $7 \times 16 = 112$ et $7 \times 17 = 119$ donc 117 n'est pas un multiple de 7.

b. $7 \times (-35) = -245$ donc -245 est un multiple de 7.

129 Les diviseurs de 180 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 18 ; 20 ; 30 ; 36 ; 45 ; 60 ; 90 ; 180 et leurs opposés.

130

Nombre	Divisible par 2	Divisible par 3	Divisible par 5	Divisible par 9
37 245	NON	OUI	OUI	NON
5 520	OUI	OUI	OUI	NON
7 631	NON	NON	NON	NON
11 628	OUI	OUI	NON	OUI

131 Un multiple de 9 est de la forme $9k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et un multiple de 12 est de la forme $12k'$ avec $k' \in \mathbb{Z}$. $9k + 12k' = 3(3k + 4k') = 3K$ avec $K = 3k + 4k'$ entier relatif donc la somme d'un multiple de 9 et d'un multiple de 12 est un multiple de 3.

132 a. $n - 3 + n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 + n + 3 = 7n$.

b. Cette somme est un multiple de 7.

133 a. • Cas n pair :

$3n$ est pair donc $3n + 2$ est pair.

• Cas n impair :

$3n$ est impair donc $3n + 2$ est impair.

b. Cas n pair :

$1 - n$ est donc impair donc $n(1 - n)$ est pair.

• Cas n impair :

$1 - n$ est pair donc $n(1 - n)$ est pair.

Dans tous les cas $n(1 - n)$ est pair.

134 (1), (2), (4).

135 a. $1728 = 4 \times 432 = 2^2 \times 4 \times 108 = 2^2 \times 2^2 \times 4 \times 27 = 2^6 \times 3^3$

b. $1728 = (2^2 \times 3)^3 = 12^3$. Ainsi 1 728 est le cube de 12.

136 $1134 = 2 \times 567 = 2 \times 9 \times 63 = 2 \times 3^2 \times 3^2 \times 7 = 2 \times 3^4 \times 7$

$1400 = 4 \times 350 = 2^2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 5 = 2^3 \times 5^2 \times 7$

$10\sqrt{1134} - 9\sqrt{1400} = 10\sqrt{2 \times 3^4 \times 7} - 9\sqrt{2^3 \times 5^2 \times 7} = 10 \times 3^2 \sqrt{14} - 9 \times 2 \times 5 \sqrt{14} = 0$

137 La proportion de jetons blancs dans le sac est :

$\frac{264}{186 + 264} = \frac{264}{450} = \frac{6 \times 44}{6 \times 75} = \frac{44}{75}$.

Approfondir

Exercices

138 $\frac{420}{882} = \frac{2 \times 210}{2 \times 441} = \frac{210}{441} = \frac{3 \times 70}{3 \times 147} = \frac{70}{147} = \frac{7 \times 10}{7 \times 21} = \frac{10}{21}$

139 $435 = 3 \times 5 \times 29$

Helen lira 29 pages par jour.

140 a. 11 ; 13 ; 17 ; 31 ; 37 ; 71 ; 73 ; 79 ; 97.

b. Un nombre pair à deux chiffres ou plus n'est pas premier, donc les chiffres d'un nombre premier permutable à deux chiffres ou plus sont impairs.

De même un entier à deux chiffres ou plus se terminant par 5 n'est pas premier, donc les chiffres d'un nombre premier permutable à deux chiffres ou plus sont distincts de 5.

c. 101 contient un chiffre pair donc il n'est pas permutable.

$371 = 7 \times 53$ donc 137 n'est pas permutable.

141 1. a. $7744 = 4 \times 1936 = 2^2 \times 4 \times 484 = 2^4 \times 4 \times 121 = 2^6 \times 11^2$

$17424 = 4 \times 4356 = 2^2 \times 4 \times 1089 = 2^4 \times 9 \times 121 = 2^4 \times 3^2 \times 11^2$

b. $44^2 = (4 \times 11)^2 = (2^2 \times 11)^2 = 2^4 \times 11^2$

$2^6 \times 11^2 = 2^4 \times 11^2 \times 2^2$ et $2^4 \times 3^2 \times 11^2 = 2^4 \times 11^2 \times 3^2$ donc 17 424 et 7 744 sont divisible par 44^2 .

2. a. Leur plus grand diviseur commun est $44^2 = 1936$.

b. Leur plus petit multiple commun est $2^6 \times 3^2 \times 11^2$ soit 69 696.

c. $\sqrt{7744} = \sqrt{2^6 \times 11^2} = 2^3 \times 11 = 88$

d. $\sqrt{17424} = \sqrt{2^4 \times 3^2 \times 11^2} = 2^2 \times 3 \times 11 = 132$

e. $\frac{7744}{17424} = \frac{2^6 \times 11^2}{2^4 \times 3^2 \times 11^2} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$

142 $4312 = 2^3 \times 7^2 \times 11$

$2 \times 11 \times 4312 = 2^4 \times 7^2 \times 11^2 = (2^2 \times 7 \times 11)^2$

Il faut donc multiplier 4 312 par 22 pour obtenir un carré parfait.

143 $800 = 2^5 \times 5^2$

Le plus petit entier naturel qui multiplié par 800 est :

a. un carré parfait est 2.

En effet, $2 \times 2^5 \times 5^2 = (2^3 \times 5)^2 = 40^2$.

b. un cube parfait est $2 \times 5 = 10$.

En effet $2 \times 5 \times 2^5 \times 5^2 = 2^6 \times 5^3 = (2^2 \times 5)^3 = 20^3$.

c. à la fois un carré parfait et un cube parfait est $2 \times 5^5 = 1250$.

En effet $2 \times 5^4 \times 2^5 \times 5^2 = 2^6 \times 5^6 = (2^3 \times 5^3)^2 = (2^2 \times 5^2)^3$.

144 1. On peut conjecturer que $a = n(n^2 + 5)$ est divisible par 3 pour tout entier naturel n .

2. a. Lorsqu'on effectue la division euclidienne d'un entier n par 3, les restes possibles sont 0, 1, 2.

b. 1^{er} cas : $n = 3k$.

$a = 3k(n^2 + 5) = 3K$ avec $K = k(n^2 + 5)$ donc a est divisible par 3.

2^e cas : $n = 3k + 1$.

$n^2 + 5 = (3k + 1)^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 6 = 3(3k^2 + 2k + 2) = 3K$ avec $K = 3k^2 + 2k + 2$ entier, donc $n^2 + 5$ est divisible par 3.

Par conséquent, $a = n(n^2 + 5)$ est aussi divisible par 3.

3^e cas : $n = 3k + 2$.

$n^2 + 5 = (3k + 2)^2 + 5 = 9k^2 + 6k + 9 = 3(3k^2 + 2k + 3) = 3K$ avec $K = 3k^2 + 2k + 3$ entier donc $n^2 + 5$ est divisible par 3.

Par conséquent, $a = n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

c. D'après b., pour tout entier n , $a = n(n^2 + 5)$ est divisible par 3.

145 En note L la longueur et ℓ la largeur, en m, du city stade.

Ainsi, $L \times \ell = 312$ et $2(L + \ell) = 74$, soit $L + \ell = 37$.

L et ℓ sont donc des diviseurs de 312 dont la somme vaut 37 et le produit 312.

La décomposition en produit de facteurs premiers de 312 est : $312 = 2^3 \times 3 \times 13$.

Les diviseurs positifs de 312 et inférieurs à 37 sont :

1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 13 ; 24 et 26.

Seuls 24 et 13 ont pour somme 37 et pour produit 312.

La longueur du city stade est 24 m et la largeur 13 m.

146 Notons n un tel entier.

$n - 1$ est donc divisible par 5, 7, 10 et 15, autrement dit $n - 1$ est un multiple de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

$210 \times 6 = 1260$ et $210 \times 8 = 1680$.

Les nombres possibles compris entre 1 200 et 1 700 sont donc $1260 + 1 = 1261$; $1470 + 1 = 1471$; $1680 + 1 = 1681$.